Klausur zur Vorlesung „Relativistische Quantenfeldtheorie“

(Wintersemester 2007/2008)

Dr. O. Brein, Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.

Termin: Mittwoch 6.2.2008

Zum Bestehen der Klausur sind 60% (18 Punkte) der erreichbaren Punktzahl (30) nötig, ggfs. abzüglich eines 10%-Rabatts bei aktiver Teilnahme an den Übungen (dann 15 Punkte).

Aufgabe 1 : Masseloses Vektorfeld
(6 Punkte)

Betrachten Sie die klassische Feldtheorie eines Vektorfeldes $A^\mu(x)$ mit der Wirkung

$$S_1 = \int d^4x\, \mathcal{L}_1(x) \;\text{ mit }\; \mathcal{L}_1(x) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Feldgleichungen für $A^\mu(x)$, die aus dem Prinzip der stationären Wirkung folgen.

(b) Die Wirkung des elektromagnetischen Feldes im Vakuum lautet

$$S_2 = \int d^4x\, \mathcal{L}_2(x) \;\text{ mit }\; \mathcal{L}_2(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,,\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.$$

Geben Sie eine Eichbedingung für A_μ an, so daß S_2 in dieser Eichung mit S_1 zusammenfällt.

(c) Warum ist die Wirkung

$$S_3 = \int d^4x\, \mathcal{L}_3(x) \;\text{ mit }\; \mathcal{L}_3(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,,$$

äquivalent zu S_2?

Aufgabe 2 : Vakuumerwartungswerte von Feldern und Poincaré-Invarianz
(6 Punkte)

Gegeben sei eine beliebige wechselwirkende Quantenfeldtheorie mit einem Lorentz-kovarianten Dirac-Feld $\psi_b(x)$ (b : Spinorindex), Vektorfeld $A_\mu(x)$ und Skalarfeld $\phi(x)$. Der Grundzustand sei Poincaré-invariant, d.h. $U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle$ für alle Lorentz-Transformationen Λ und Translationen mit beliebigem Vierervektor a.

(a) Zeigen Sie, daß dies

$$\langle 0|\psi_a(x)|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)|0\rangle = 0$$

zur Folge hat.

(b) Was läßt sich über den Vakuumerwartungswert $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ eines Skalarfeldes aussagen?

Aufgabe 3 : Skaleninvarianz der masselosen ϕ^4-Theorie
(8 Punkte)

Die Wirkung

$$S = \int d^4x\,\mathcal{L}(x) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \lambda\phi^4$$

ist invariant unter der Transformation:

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto x'^\mu = e^{-\alpha}x^\mu\,, \\ \phi(x) &\mapsto \phi'(x') = e^{\alpha}\phi(x)\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie zunächst, daß $d^4x\,\mathcal{L}(x)$ invariant ist unter obiger Transformation mit endlichem Parameter α.

(b) Betrachten Sie nun infinitesimale Transformationen (d.h. $\alpha \to \delta\alpha$ mit $\delta\alpha^2 \ll \delta\alpha$). Zeigen Sie mit Hilfe des Noethertheorems, daß der zu dieser Symmetrie korrespondierende Noetherstrom $\mathcal{J}^\mu(x)$ folgende Form hat:

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \phi(\partial^\mu\phi) + x^\nu(\partial_\nu\phi)\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}x^\mu(\partial_\nu\phi)(\partial^\nu\phi) + \lambda x^\mu\phi^4\,.$$

(c) Weisen sie mit Hilfe der Feldgleichung der Theorie nach, daß $\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 4 : Zerfall $f_1 \to f_2 + A$
(10 Punkte)

Das S-Matrixelement $S_{\beta\alpha}$ des Zerfalls eines Fermions f_1 mit Masse m_1 in ein Fermion f_2 mit Masse m_2 und ein neutrales skalares Teilchen A mit Masse m_A ist näherungsweise durch

$$S_{\beta\alpha} = i\int d^4x\,\langle f_2, p_2, \sigma_2;\, A, p_A|\mathcal{L}_{\text{int}}(x)|f_1, p_1, \sigma_1\rangle$$

gegeben. Dabei ist die Wechselwirkungs-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = g\,{:}\phi(x)\bar{\psi}_{f_2}(x)\psi_{f_1}(x){:}\,,$$

mit einem freien Skalarfeld $\phi(x)$ mit Masse m_A, freien Dirac-Feldern $\psi_{f_1}(x)$ und $\psi_{f_2}(x)$ mit Massen m_1 und m_2 und einer Kopplungskonstanten g gegeben.

(a) Bestimmen Sie das T-Matrixelement $T_{\beta\alpha}$ als Funktion der Impulse p_1, p_2, p_a und Spin-Polarisationen σ_1, σ_2 der Teilchen.

(b) Bestimmen Sie das quadrierte Matrixelement $|T_{\beta\alpha}|^2(p_1, \sigma_1, p_2, \sigma_2, p_A)$.

(c) Gehen Sie davon aus, daß in der Präparation des Anfangszustandes f_1 beide Spin-Polarisationen gleich wahrscheinlich sind. Bestimmen Sie das über Spin-Polarisationen des Anfangszustandes gemittelte und über Spin-Polarisationen des Endzustandes summierte quadrierte Matrixelement $\overline{|T_{\beta\alpha}|^2}(p_1, p_2, p_A)$.