12. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 13.2.2008, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 36 : Störungsentwicklung der Vierpunktfunktion in der ϕ^4-Theorie

Gegeben sei die ϕ^4-Theorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}{:}\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x){:} - \frac{m^2}{2}{:}\phi^2(x){:} + \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \;\text{ mit }\; \mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -\frac{\lambda}{4!}{:}\phi^4(x){:}$$

und der Kopplungskonstanten λ.

(a) Berechnen Sie die Störungsentwicklung der Vierpunktfunktion

$$\tau_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle$$

bis zur Ordnung λ^2 mit Hilfe der Gell-Mann–Low Formel. Veranschaulichen Sie die Beiträge durch Feynman-Diagramme.

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Ortsraum-τ-Funktion, $\tilde{\tau}_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$, aus (a). Veranschaulichen Sie die Beiträge wieder durch Feynman-Diagramme.

(c) Bestimmen Sie aus (b) die zusammenhängende und amputierte Greensche Funktion $\tilde{\tau}^{\text{amp.}}_{4,\text{c}}(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

(d) Was läßt sich für die vorliegende Theorie über die n-Punkt-Funktionen mit ungeradem n aussagen?

<u>Hinweis</u> : Schleifenintegrale sollen nicht ausgeführt werden.

Aufgabe 37 : Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung)

Betrachten Sie die Reaktion

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \to e^-(p_3) + e^-(p_4)$$

in der Quantenelektrodynamik.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Feynmanregeln aus der Vorlesung das zur Reaktion gehörige T-Matrixelement in der führenden Ordnung der Störungsentwicklung:

$$T_{fi} = T_{fi}(p_1, \sigma_1, p_2, \sigma_2, p_3, \sigma_3, p_4, \sigma_4)\,.$$

Dabei bezeichnen p_i und σ_i jeweils Viererimpuls und Spin-Polarisation des i-ten Elektrons.

(b) Berechnen Sie das über Spin-Polarisationen summierte und gemittelte quadrierte Matixelement:

$$\overline{|T_{fi}|} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\sum_{\sigma_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{\sigma_3,\sigma_4=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T_{fi}(p_1,\sigma_1,p_2,\sigma_2,p_3,\sigma_3,p_4,\sigma_4)|^2 \,.$$

Hinweis : Verwenden Sie zur Ausführung der Summen über Spin-Polarisationen Vollständigkeitsrelationen, welche die u- und v-Spinoren erfüllen. Zur Ausführung der Spuren über Produkte von Dirac-Matrizen sind folgende Formeln nützlich (überzeugen Sie sich von deren Gültigkeit):

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma^\mu &= 4\cdot \mathbf{1}_{(4\times 4)}\,,\\
\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu &= -2\gamma_\nu\,,\\
\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma^\mu &= 4g_{\nu\rho}\cdot \mathbf{1}_{(4\times 4)}\,,\\
\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma^\mu &= -2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\nu\,,\\
\mathrm{Sp}[\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}] &= g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Sp}[\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}] - g_{\mu_1\mu_3}\mathrm{Sp}[\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}]\\
&\quad \pm \text{(alternierend)}\ldots\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_n}\mathrm{Sp}[\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{n-1}}]\ \text{ falls } n \text{ gerade}\,,\\
\mathrm{Sp}[\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}] &= 0 \ \text{ falls } n \text{ ungerade}\,.
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im Schwerpunktssystem (d.h. für $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{0}$) unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 31 (Übungsblatt 10) als Funktion der Mandelstam-Variablen $s=(p_1+p_2)^2$, $t=(p_1-p_3)^2$ und $u=(p_1-p_4)^2$.

(d) Bestimmen Sie $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im nicht-relativistischen Grenzfall, d.h. für $|\vec{p}_i| \ll m_e$. Vergleichen Sie ihr Resultat mit der Rutherford-Formel (Wirkungsquerschnitt für die klassische Streuung zweier geladener, nicht-relativistischer Teilchen).

(e) Diskutieren Sie das bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts σ auftretende Problem, wenn man über den vollen Streuwinkelbereich integriert.