9. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 16.1.2008, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 26 : Zur kovarianten Quantisierung des masselosen Vektorfeldes

Die Lagrangedichte des freien Vektorfeldes mit Eichfixierungsterm sei gegeben durch:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\,, \qquad\qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{1}$$

Im weiteren sei immer $\xi = 1$ gesetzt.

(a) Zeigen Sie, daß die kanonischen Vertauschungsrelationen für die Felder A^μ und kanonisch konjugierten Feldimpulse Π_μ auf folgende Vertauschungsrelationen für A^μ und $\dot{A}^\mu (= \frac{\partial}{\partial t}A^\mu)$ führen:

$$[\dot{A}^\mu(t,\vec{x}), A^\nu(t,\vec{y})] = i g^{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie, unter Verwendung der Fourierdarstellung des Vektorfeldes,

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{d^3k}{2k^0}\sum_{\lambda=0}^{3}\left[\epsilon^\mu_\lambda(k)a^\dagger_\lambda(k)e^{-ikx} + \epsilon^\mu_\lambda(k)a_\lambda(k)e^{ikx}\right] \quad \text{mit} \quad k^2 = 0\,,$$

daß sich aus den Vertauschungsrelationen (2) folgende Vertauschungsrelationen für die $a^\dagger_\lambda(k)$ und $a_\lambda(k)$ ergeben:

$$[a_\lambda(k), a^\dagger_{\lambda'}(k')] = -g_{\lambda\lambda'}2k^0\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\,, \quad [a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = [a^\dagger_\lambda(k), a^\dagger_{\lambda'}(k')] = 0\,. \tag{3}$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen für die Polarisationsvektoren: $\epsilon^\mu_\lambda(k)\epsilon_{\lambda',\mu}(k) = g_{\lambda\lambda'}$ und $\sum_\lambda \epsilon^\mu_\lambda(k)\epsilon^\nu_\lambda(k)g_{\lambda\lambda} = g^{\mu\nu}$.

Aufgabe 27 : Norm-Null-Zustände

Eine Konsequenz der Vertauschungsrelationen (3) ist, daß Ein-Teilchen-Zustände mit skalarer Polarisation ($|k,\lambda=0\rangle$) negative Norm haben und daß der Operator

$$\alpha^\dagger_0(k) := a^\dagger_0(k) - a^\dagger_3(k)$$

Norm-Null-Zustände erzeugt.

Zeigen Sie, daß die folgenden Zustandsvektoren die Norm Null haben:

$$|\Phi_1\rangle = \int\frac{d^3k}{2k^0}f(k)\alpha^\dagger_0(k)|0\rangle\,,$$
$$|\Phi_2\rangle = \int\frac{d^3q}{2q^0}\int\frac{d^3k}{2k^0}f(q)g(k)\alpha^\dagger_0(q)\alpha^\dagger_0(k)|0\rangle\,.$$

Berechnen Sie dazu zunächst explizit die Wirkung der $\alpha_0^\dagger$ auf den Vakuumzustand, d.h. verwenden Sie *nicht* die Vertauschungsrelation für α_0 und $\alpha_0^\dagger$ in der Herleitung.

Aufgabe 28 : Drehimpulsoperator und Eichinvarianz
Für das masselose Vektorfeld, beschrieben durch die Lagrangedichte (1), ergibt sich für $\xi = 1$ aus dem Noethertheorem folgender Drehimpulsoperator:

$$J^l = \epsilon^{lij} \int d^3x : \left\{ \dot{A}^j A^i + \dot{A}_\nu (x^j \partial^i) A^\nu \right\} : .$$

In der Lorentz-Eichung gibt es die „Rest-Eichsymmetrie“

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \;\text{ mit }\; \Box\lambda(x) = 0 \,.$$

(a) Zeigen Sie, daß der Drehimpuls fuer ein klassisches Feld A_μ, welches die Lorentz-Bedingung erfüllt, invariant ist unter obiger Transformation.

(b) Zeigen Sie, daß der Drehimpulsoperator fuer ein Quantenfeld A_μ nicht invariant ist unter obiger Transformation, d.h. J^l transformiert sich gemäß

$$J^l \xrightarrow{\lambda} J^l + \Delta_\lambda J^l$$

mit $\Delta_\lambda J^l \neq 0$. Berechnen Sie hierzu den Zusatzterm $\Delta_\lambda J^l$. Beachten Sie, daß $\lambda(x)$ auch im Quantenmechanischen Fall eine c-Zahl und kein Operator ist.

(c) Zeigen Sie, daß für ein Quantenfeld A_μ, welches der Quanten-Version der Lorentz-Bedingung genügt (d.h. $\partial_\mu A_V^\mu(x)|\psi_{\text{phys}}\rangle = 0$ für den Vernichteranteil des Vektorfeldes), der Operator $\Delta_\lambda J^l$ verschwindende Matrixelemente im physikalischen Zustandsraum hat:

$$\langle \psi^{(1)}_{\text{phys}} | \Delta_\lambda J^l | \psi^{(2)}_{\text{phys}} \rangle = 0 \,.$$

Hinweise: Verwenden Sie, daß Randterme, die bei partieller Integration auftreten, verschwinden.