8. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 9.1.2008, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 23 : Mirkokausalität für Observablen des Diracfeldes

Observablen für Dirac-Teilchen müssen mindestens bilinear in den Feldern ψ und $\bar{\psi}$ sein. Es seien $O_A(x) = \boldsymbol{:}\bar{\psi}(x)\Gamma_A\psi(x)\boldsymbol{:}$ solche Observablen, wobei Γ_A (4×4)-Matrizen im Spinorraum sind (z.B. $\boldsymbol{:}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\boldsymbol{:}$).

Zeigen Sie mit Hilfe der Antikommutator-Relationen zu gleichen Zeiten für ψ und $\bar{\psi}$, daß

$$[O_A(x), O_B(y)] = 0 \qquad \text{für} \qquad (x-y)^2 < 0\,,$$

also für raumartiges $(x-y)$.

(a) Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Gleichung für Operatoren zu gleichen Zeiten, d.h. $x^0 = y^0$.

Hinweis : Verwenden Sie die Identität

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - AC\{B, D\} - C\{A, D\}B + \{C, A\}DB\,.$$

(b) Führen Sie den allgemeineren Fall raumartiger $(x-y)$ mit $x^0 \neq y^0$ auf den in (a) bewiesenen zurück durch Anwendung geeigneter Ponicaré-Transformationen der Feldoperatoren $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$.

Aufgabe 24 : Kovarianter Helizitätsoperator im Spinorraum

Zeigen sie unter Verwendung der chiralen Darstellung der γ-Matrizen, daß die Darstellungsmatrix für den Spin

$$\vec{S} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad \qquad (S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])$$

als

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\gamma_5\gamma^0\vec{\gamma}$$

geschrieben werden kann und daß die Beziehung

$$\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2}\gamma_5 \not{s} \frac{\not{p}}{m}$$

gilt, wobei $(s^\mu) = \frac{1}{m}(|\vec{p}|, p^0\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})$. Überzeugen Sie sich auch, daß s^μ tatsächlich ein Vierervektor ist.

Aufgabe 25 : Zeitgeordnetes Produkt von Operatoren und Greensche Funktion
Das zeitgeordnete Produkt von bosonischen Feldern ϕ_A, ϕ_B bzw. fermionischen Feldern ψ_A, ψ_B ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T\phi_A(x)\phi_B(y) &= \theta(x^0 - y^0)\phi_A(x)\phi_B(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi_B(y)\phi_A(x)\,, \\ T\psi_A(x)\psi_B(y) &= \theta(x^0 - y^0)\psi_A(x)\psi_B(y) - \theta(y^0 - x^0)\psi_B(y)\psi_A(x)\,. \end{aligned}$$

(a) Überzeugen Sie sich, daß für ein quantisiertes geladenes Skalarfeld, $\phi(x) \neq \phi^\dagger(x)$, gilt:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle = iD(x-y)\,. \tag{1}$$

Dabei ist $D(x-y)$ die kausale Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung.

(b) Überzeugen Sie sich, daß für ein quantisiertes Diracfeld, $\psi(x)$, gilt:

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = iS_{ab}(x-y)\,. \tag{2}$$

Dabei ist

$$S_{ab}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \left(\frac{(\not{q}+m)_{ab}}{q^2 - m^2 + i\epsilon}\right) e^{-iq(x-y)} \tag{3}$$

die kausale Greensche Funktion der Dirac-Gleichung.

Hinweis : Um die Identitäten (1) und (3) zu erkennen, muß auf den rechten Seiten der Gleichungen jeweils die q^0-Integration ausgeführt sein.