6. Übungsblatt, Relativistische Quantenfeldtheorie

Dr. O. Brein, Zimmer 608 (Hochhaus), Tel. 0761/203-5737.

Besprechung: Mittwoch 12.12.2007, Westbau SR.

Webseite: `http://pheno.physik.uni-freiburg.de/~obr/qft1.html`

Aufgabe 18 : Kanonische Vertauschungsrelationen für Erzeuger und Vernichter
Ein quantisiertes Skalarfeld sei gegeben durch die Fourierzerlegung

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] , \tag{1}$$

mit $k^0 = k^0(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. Zeigen Sie, daß aus den kanonischen Vertauschungsrelationen für das Feld ϕ und den kanonisch konjugierten Impuls $\Pi = \partial^0 \phi$,

$$[\phi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) , \qquad [\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = [\Pi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{y})] = 0 , \tag{2}$$

folgende Vertauschungsrelationen für die Operatoren $a(\vec{k})$ und $a^\dagger(\vec{k})$ folgen:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = 2k^0\, \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) , \qquad [a(\vec{k}), a(\vec{q})] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = 0 . \tag{3}$$

Aufgabe 19 : Energie- und Impuls-Operator des reellen Skalarfeldes
Berechnen Sie, ausgehend von der Lagrangedichte des freien, reellen Skalarfeldes,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 , \tag{4}$$

und der Fourierzerlegung von $\phi(x)$ in Gleichung (1) und der daraus abgeleiteten für $\Pi(x)$,

(a) den Hamilton-Operator H ($\equiv P^0 = \int d^3x\, T^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x\, [\Pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2]$),

(b) den Impuls-Operator $P^k = \int d^3x\, T^{0k} = \int d^3x\, \Pi(t,\vec{x}) \partial^k \phi(t,\vec{x})$,

jeweils ausgedrückt als ein Integral über den 3er-Impuls $\vec{k}$ mit den Operatoren $a(\vec{k})$ und $a^\dagger(\vec{k})$.

Aufgabe 20 : Drehimpulsoperator für das relle Skalarfeld
Fassen Sie die im Rahmen der klassischen Feldtheorie hergeleiteten erhaltenen Noetherladungen (Aufgabe 10(c), 3. Übungsblatt)

$$L^{\mu\nu} = \int d^3x \left[x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu} \right] ,$$

welche aus der Lorentz-Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ (Gleichung (4)) folgen, nun als Operatoren auf, indem Sie das auftretende Feld $\phi(x)$ als Operator auffassen.

Bestimmen Sie unter Verwendung der kanonischen Vertauschungsrelationen (2) die Kommutatoren

$$[L^{\mu\nu}, \phi(t,\vec{x})] .$$